INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI VÂLCEA

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEȚEANĂ – 12.03.2011
BAREM DE CORECTARE
Clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

Să se arate că suma pătratelor a cinci numere naturale consecutive nu se poate scrie ca suma pătratelor a trei numere naturale consecutive.

Prof. Aurel Ene, Rm. Vâlcea

<u>Soluție și barem</u>

Prin reducere la absurd presupunem că există x, y $\in$ N astfel încât să avem:

$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = y^2 + (y + 1)^2 + (y + 2)^2 + (y + 3)^2 + (y + 4)^2$ …………….… 1p

Oricare ar fi x $\in$N avem: $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = \boldsymbol{M}_3 + 2$ ……………………….....2p

Notăm $S = y^2 + (y + 1)^2 + (y + 2)^2 + (y + 3)^2 + (y + 4)^2$

Dacă $y = M_3$ sau $y = M_3 + 2$ atunci $S = M_3$ ………………………………….……2p

Dacă $y = M_3 + 1$ atunci $S = M_3 + 1$ ……………………………………………….1p

Finalizare ……………………………………………………………………….1p

SUBIECTUL 2

a) Determinați numerele naturale nenule a și b știind că $\frac{5b}{4a+3} = \frac{b-1}{a}$.

D.M. Bătinețu, G.M. nr. 4/2009

b) Fie $N = 4^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)\cdot\ldots\cdot(a_{2010}+a_{2011})(a_{2011}+a_1)}$, unde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2011}$ sunt numere naturale nenule. Determinați restul împărțirii numărului $N - 1$ la 5.

<u>Soluție și barem</u>

a) Egalitatea este echivalentă cu: $\frac{5a}{4a+3} = \frac{b-1}{b}$ ……………………………………..………1p

$\frac{b-1}{b} < 1$ ……………………………………………………………………………1p

$\Rightarrow 5a < 4a + 3 \Rightarrow a < 3$ ……………………………………………………………….1p

Finalizare a = 2 și b = 11 …………………………………………………………..1p

b) $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_4) \cdot \ldots \cdot (a_{2010} + a_{2011})(a_{2011} + a_1)$ - par ……….…….1p

$\Rightarrow U(N) = 6$ ……………………………………………………………………..1p

Finalizare rest = 0 ……………………………………………………………………1p

SUBIECTUL 3

Se consideră triunghiul ABC și punctul E mijlocul segmentului (BC). Fie D mijlocul segmentului (BE) și F mijlocul segmentului (EC). Pe semidreapta (AE se consideră punctul M astfel încât (AE) ≡ (EM).

a) Să se arate că $\widehat{CAF} \equiv \widehat{BMD}$

b) Arătați că dacă (AF) ≡ (FM) atunci ∠BAD ≡ ∠CAF;

<u>Soluție și barem</u>

a) $\Delta AEF \equiv \Delta MED$ (l.u.l.) $\Rightarrow (AF) \equiv (DM)$ (1) și $\angle AFE \equiv \angle MDE$ (2) 1p
Din (2) $\Rightarrow \angle BDM \equiv \angle CFA$ 1p

$\Delta AFC \equiv \Delta MDB$ (l.u.l.) $\Rightarrow \widehat{CAF} \equiv \widehat{BMD}$ 1p

b) $\Delta MEF \equiv \Delta AED$(l.u.l.) $\Rightarrow (AD) \equiv (FM) \equiv (AF)$ 1p
$\Delta AED \equiv \Delta AEF$ (l.l.l.) $\Rightarrow \angle ADE \equiv \angle AFE \Rightarrow \angle ADB \equiv \angle AFC$ 2p
$\Delta ADB \equiv \Delta AFC \Rightarrow \angle BAD \equiv \angle CAF$ 1p

SUBIECTUL 4

Orice număr natural nenul este colorat în alb sau roşu astfel încât sunt folosite doar cele 2 culori. Se ştie că dacă numărul a este alb atunci a+10 este de asemenea alb iar dacă numărul b este roşu atunci b+15 este la fel roşu.

a) Demonstraţi că pentru fiecare număr natural nenul x , numerele x şi x+5 sunt colorate cu aceeaşi culoare.

b) Să se găsească cel mai mic număr natural nenul n pentru care putem face afirmaţia că oricum ar fi colorate numerele, folosind cele 2 culori, printre primele n naturale nenule avem cel puţin 400 albe.

<u>Soluţie şi barem</u>

a) Presupunem că există x natural nenul astfel încât x şi x+5 sunt colorate diferit.

- Dacă x este alb şi x+5 este roşu

$x = alb \Rightarrow x + 10 = alb \Rightarrow x+20=(x+10)+10$ trebuie să fie alb …………….……… 1p

Dar $x+5 =$ roşu $\Rightarrow x + 20 = (x + 5) + 15$ trebuie să fie tot roşu (Contradicţie)..……....1p

- Dacă x este roşu şi x+5 este alb

$x =$ roşu $\Rightarrow x + 15 =$ roşu

$x + 5 = alb \Rightarrow x + 15 = (x+5)+10$ este alb.(Contradicţie)……………………………2p

b) Din a) rezultă că numerele colorate cu aceeaşi culoare dau acelaşi rest la împărţirea cu 5 ……………………………………………………………………………2p

Deci printre primele 2000 numere sigur vor fi cel puţin 400 albe …...………….1p